## 2. Modelarea liniilor electrice

Ecuațiile de bază ale circuitelor electrice în regim cvasistaționar ca şi conceptele de inductivitate proprie şi capacitate pot fi folosite numai dacă intensitatea curentului este constantă în lungul fiecărui conductor neramificat, la fiecare moment dat.

Pentru aceste circuite este posibilă separarea de zone în spațiu unde câmpul electric este intens şi alte zone unde câmpul magnetic este intens, respectiv densitatea de energie magnetică este neglijabilă față de densitatea de energie electrică sau invers.

Dacă se consideră un sistem format din două conductoare paralele, nici una dintre aceste condiții nu mai este îndeplinită. La un moment dat intensitățile curenților se modifică de-a lungul liniei iar densitățile de energie electrică şi magnetică sunt distribuite de-a lungul întregii linii.

Liniile lungi sunt circuite cu inductanță şi capacitate distribuite în lungul lor.

Pentru o linie formată din două conductoare paralele se notează cu $C_0$ - capacitatea dintre conductoarele liniei corespunzătoare unității de lungime [F/m], $L_0$ - inductanța pe unitatea de lungime [H/m], $R_0$ - rezistența conductoarelor liniei corespunzătoare unității de lungime [Ω/m] şi $G_0$ - conductanța izolației pe unitatea de lungime [S/m] .

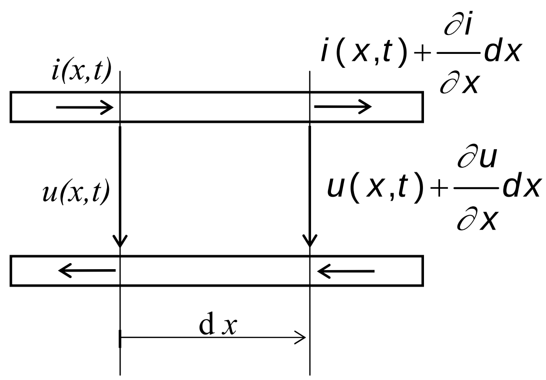


***Figura 2.1.*** Tronson elementar de linie bifilară

Scriind legea inducției electromagnetice şi respectiv legea conservării sarcinii electrice pentru acest tronson se pot obține ecuațiile diferențiale care modelează funcționarea liniei lungi.

Pentru aceasta se va considera o porțiune de linie de lungime dx suficient de mică pentru a putea considera că intensitatea curentului este constantă pe toată lungimea d$x$; se poate scrie :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0\frac{\partial i}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Utilizând aceste ecuații se poate stabili un circuit cu elemente concentrate care să modeleze tronsonul de lungime d$x$:

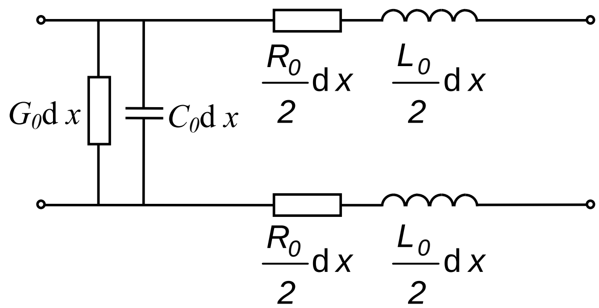


***Figura 2.2.*** Schema echivalentă a elementului de lungime d*x*

Întreaga linie poate fi considerată ca o succesiune de asemenea cuadripoli, corespunzătoare unui număr infinit de circuite echivalente elementare legate în lanț.

Derivând ambii membri ai relațiilor în raport cu $x$ şi înlocuind derivatele date de relațiile inițiale se obțin ecuațiile telegrafiştilor de speța a doua:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R_0 C_0 + L_0 G_0)\frac{\partial u}{\partial t} + R_0 G_0 u$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (R_0 C_0 + L_0 G_0)\frac{\partial i}{\partial t} + R_0 G_0 i$$

Se observă că cele două ecuații care dau dependența tensiunii şi respectiv curentului de spațiu şi timp au aceeaşi formă.

Soluțiile acestor ecuații au expresii care sunt, în cazul general, foarte complicate.

Cele mai importante cazuri au însă soluții periodice în spațiu şi timp; de aceea se caută o soluție complexă de forma:

$$\underline{u} = U_0 \mathrm{e}^{j\omega t - \underline{\gamma} x}$$

pentru care:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = j\omega \underline{u}, \quad \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{u}, \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = -\underline{\gamma}\,\underline{u}, \quad \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} = -\underline{\gamma}^2 \underline{u}$$

Se poate obține expresia constantei $\underline{\gamma}$:

$$\underline{\gamma} = \pm\sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \overset{N}{=} \alpha + j\beta$$

numită constantă de propagare lineică.

Dacă pentru ea se consideră semnul plus, tensiunea va avea următoarea dependență de spațiu şi timp:

$$\underline{u}^+ = U_0^+ \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{j(\omega t - \beta x)} = U_0^+ \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{j\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}$$

unde cu $v$ s-a notat raportul $\omega/\beta$.

Această ecuație reprezintă o undă cu viteza de propagare $v$ şi o amplitudine caracterizată de coeficientul de atenuare $\alpha$.

Faza tensiunii la un moment $t_0$ arbitrar într-un punct arbitrar caracterizat de coordonata $x_0$ este:

$$\omega\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right)$$

Punctul care are aceeaşi fază la momentul $t$, caracterizat de coordonata $x$, este dat de relaţia:

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

ceea ce arată că punctele cu o anumită fază se deplasează de-a lungul liniei cu o viteză egală cu $v$.

Mărimea $\beta$ se numeşte constantă de fază.

Din relaţiile anterioare rezultă că soluţia ecuaţiei este o undă atenuată care se deplasează cu viteza v în sensul pozitiv al axei $x$.

Pentru o constantă de propagare lineică corespunzătoare semnului ″-″ se obţine soluţia:

$$\underline{u}^- = \underline{U}_0^- e^{\alpha x} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)}$$

Această soluţie descrie o undă care se deplasează cu viteza $v$ în sens opus sensului pozitiv al axei $x$; amplitudinea acesteia creşte spre valori crescătoare ale lui $x$, însă deoarece unda se deplasează spre valori descrescătoare ale coordonatei, rezultă că amplitudinea undei descreşte odată cu deplasarea undei.

Înlocuind în prima ecuaţie din ecuaţiile telegrafiştilor expresia undei de tensiune care se deplasează în sens pozitiv al axei $x$ $\underline{u}^+$ se observă că acesteia îi va corespunde o undă de curent $\underline{i}^+$, între amplitudinile complexe ale celor două unde existând relaţiile:

$$\underline{\gamma}\underline{U}_0^+ = (R_0 + j\omega L_0)\,\underline{I}_0^+$$

de unde se poate defini impedanţa caracteristică a liniei:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_0^+}{\underline{I}_0^+} = \frac{R_0 + j\omega L_0}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

## 2.1 Modelarea liniilor trifazate

Modelul unei linii trifazate va consta dintr-un sistem de şase ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale care conţin derivatele în raport cu timpul şi cu coordonata spaţială ale curenţilor şi tensiunilor pe cele trei faze.

Parametrii lineici de care depind coeficienţii acestor ecuaţii sunt următorii :

$r_{j0}$ rezistenţa lineică a conductorului j [Ω/m] ;
$r_p$ rezistenţa lineică a pământului [Ω/m] ;
$l_{j0}$ inductivitatea lineică proprie a sistemului conductor j - pământ [H/m] ;
$l_{jk}$ inductivitatea lineică de cuplaj dintre conductoarele j şi k [H/m] ;
$c_{j0}$ capacitatea lineică parţială proprie a sistemului conductor j - pământ [F/m] ;
$c_{jk}$ capacitatea lineică parţială dintre conductoarele j şi k [F/m] ;
$g_{j0}$ conductanţa lineică proprie dintre conductorul j şi pământ [S/m] ;
$g_{jk}$ conductanţa lineică parţială dintre conductoarele j şi k [S/m] ;

dintre care, pentru liniile electrice aeriene (LEA) se neglijează conductanţele datorită valorilor reduse ale acestora.

Aceste ecuaţii se obţin ca o particularizare a sistemului de ecuaţii care caracterizează propagarea undelor pe o linie n-filară (ecuaţiile telegrafiştilor de ordinul I pentru linii multifilare) :

$$-\frac{\partial u_j}{\partial x} = \left(r_{j0} + r_p\right) i_j + \ell_{j0}\frac{\partial i_j}{\partial t} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(r_p i_k + \ell_{jk}\frac{\partial i_k}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial i_j}{\partial x} = G_j u_j + C_j\frac{\partial u_j}{\partial t} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(g_{jk} u_k + c_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)$$

unde :

$$G_j = \sum_{k=1}^{n} g_{jk}$$

$$C_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}$$

Din acestea se pot obține ecuațiile telegrafiştilor de ordinul II :

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \left(r_{j0}G_j + r_p g_{j0}\right)u_j + \left[r_{j0}C_j + r_p c_{j0} + \ell_{j0}\left(g_{j0} + G_j\right) - S_{jj}\right]\frac{\partial u_j}{\partial t} +$$
$$+\left[\ell_{j0}\left(c_{j0} + C_j\right) - \mathrm{v}_{\mathrm{jj}}^{-2}\right]\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Bigg\{\left(r_p g_{k0} - \mathrm{r}_{\mathrm{j0}} g_{jk}\right)\mathrm{u}_k +$$
$$+\left[r_p c_{k0} - \mathrm{r}_{\mathrm{j0}} c_{jk} + \ell_{jk}\left(g_{k0} + G_k\right) - S_{jk}\right]\frac{\partial u_k}{\partial t} + \left[\ell_{jk}\left(c_{k0} + C_k\right) - \mathrm{v}_{\mathrm{jk}}^{-2}\right]\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\Bigg\}$$

$$\frac{\partial^2 ui_j}{\partial x^2} = \left(r_{j0}G_j + r_p g_{j0}\right) i_j + \left[r_{j0}C_j + r_p c_{j0} + \ell_{j0}\left(g_{j0} + G_j\right) - S_{jj}\right]\frac{\partial i_j}{\partial t} +$$
$$+\left[\ell_{j0}\left(c_{j0} + C_j\right) - \mathrm{v}_{\mathrm{jj}}^{-2}\right]\frac{\partial^2 i_j}{\partial t^2} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Bigg\{\left(r_p g_{j0} - \mathrm{r}_{\mathrm{k0}} g_{jk}\right)\mathrm{i}_k +$$
$$+\left[r_p c_{j0} - \mathrm{r}_{\mathrm{k0}} c_{jk} + \ell_{jk}\left(g_{j0} + G_j\right) - S'_{kj}\right]\frac{\partial i_k}{\partial t} + \left[\ell_{jk}\left(c_{j0} + C_j\right) - \mathrm{v}_{\mathrm{kj}}^{-2}\right]\frac{\partial^2 i_k}{\partial t^2}\Bigg\}$$

unde :

$$S_{jj} = \sum_{q=1}^{n} l_{jq}\, g_{jq}\ ; \quad S_{jk} = \sum_{q=1}^{n} l_{jq}\, g_{kq}\ ; \quad S'_{kj} = \sum_{q=1}^{n} l_{kq}\, g_{jq} \neq S_{jk}\ ;$$

$$v_{jj} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{q=1}^{n} l_{jq}\, c_{jq}}}; \quad v_{jk} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{q=1}^{n} l_{jq}\, c_{kq}}}; \quad v_{kj} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{q=1}^{n} l_{kq}\, c_{jq}}} \neq v_{jk}\ ;$$

## 2.2. Calculul parametrilor lineici ai unei LEA trifazate

*a. Inductivitatea pe fază*

Inductivitatea proprie lineică a conductorului de fază poate fi determinată utilizând formula pentru un conductor circular aflat la înălțimea $h$ de pământ:

$$\ell_{j0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h}{a}$$

care este valabilă atunci când lungimea de undă a câmpului electromagnetic în pământ este mult mai mică decât înălțimea la care se găseşte conductorul în raport cu pământul:

$$h >> \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0 f\gamma}}$$

unde $f$ este frecvența iar $\gamma$ este conductivitatea solului.

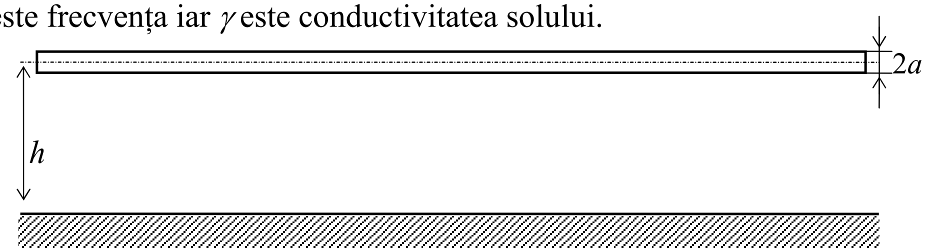


***Figura 2.3.*** Calculul inductivității sistemului conductor de fază-pământ

În caz contrar poate fi aplicată formula:

$$\ell_{j0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_p}{a}$$

unde $D_p$ este distanța dintre conductorul de fază şi conductorul fictiv de întoarcere prin pământ:

$$D_p = \frac{2,085}{\sqrt{f\gamma 10^{-5}}}$$

*b. Inductivitatea lineică de cuplaj între faze*

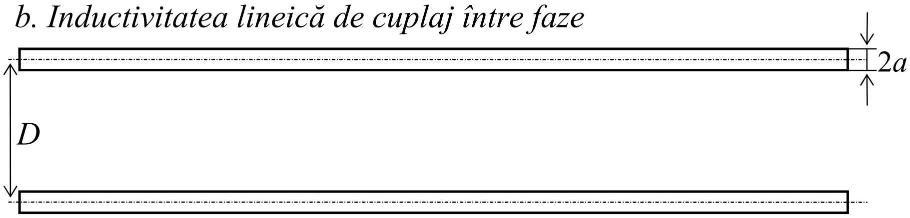


***Figura 2.4.*** Calculul inductivității de cuplaj între faze

Inductivitatea lineică de cuplaj între faze se determină pornind de la inductivitatea proprie a conductorului $\ell_{j0}$ şi inductivitatea lineică a unei linii bifilare la înălțimea $h$ în raport cu pământul [KAL1]:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a} - \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{D^2}{4h^2} \right)$$

Ținând cont că:

$$\ell_{j0} - \ell_{jk} = \frac{1}{2} L$$

se obține inductivitatea lineică de cuplaj:

$$\ell_{jk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln\left(1 + \frac{4h^2}{D^2}\right)$$

*c. Capacitățile parțiale dintre conductorul de fază şi pământ şi dintre conductoarele a două faze*

Capacitățile parțiale dintre conductoare sau dintre un conductor şi pământ se determină pornind de la relațiile lui Maxwell pentru capacități:

$$V_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \alpha_{13} q_3$$
$$V_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \alpha_{23} q_3$$
$$V_3 = \alpha_{31} q_1 + \alpha_{32} q_2 + \alpha_{33} q_3$$

unde : $V_i$ : potențialul conductorului i ;

$q_i$ : sarcina de pe conductorul i ;

$\alpha_{ij}$ : coeficientul de potențial dintre conductoarele i şi j .

Pentru determinarea coeficienților de potențial $\alpha_{ij}$ se consideră pe rând că sarcina $q_j$ de pe conductorul j este diferită de zero iar celelalte sarcini sunt nule şi se determină potențialele create de această sarcină la suprafețele fiecărui conductor şi se aplică formula :

$$\alpha_{ij} = \frac{V_i}{q_j}, \qquad q_j \neq 0 \text{ iar celelalte sarcini sunt nule}$$

Atunci când se consideră sistemul de conductoare în prezența pământului se aplică metoda imaginilor electrice (dacă se consideră pământul ca un semiplan conductor) introducând conductoare imagine încărcate cu o sarcină de aceeaşi valoare dar de semn contrar ca şi conductoarele reale.

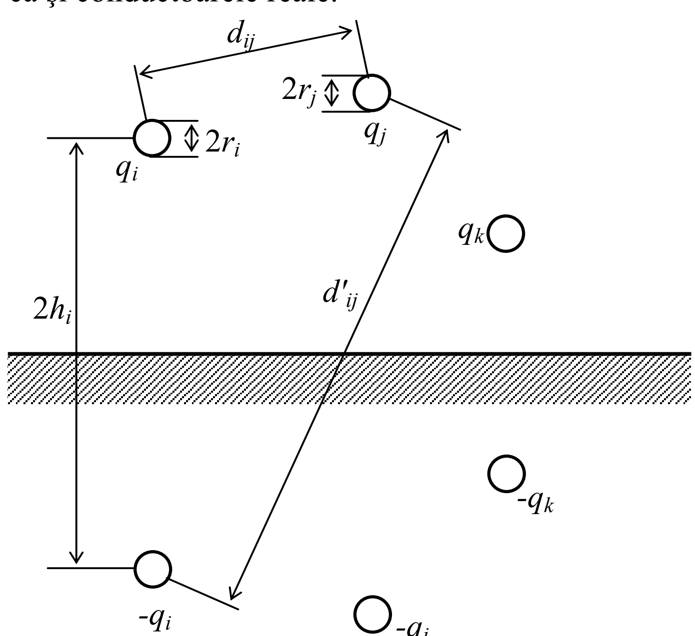


***Figura 2.5.*** Calculul coeficienților de potențial pentru o LEA în prezența pământului

Atunci când conductoarele sunt circulare, coeficienții de potențial au valorile :

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \frac{2h_i - r_i}{r_i}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \frac{d'_{ij} - r_j}{d_{ij} - r_j}$$

Odată determinați coeficienții de potențial se poate rezolva sistemul în raport cu sarcinile $q_i$:

$$q_1 = \lambda_{11}V_1 + \lambda_{12}V_2 + \lambda_{13}V_3$$
$$q_2 = \lambda_{21}V_1 + \lambda_{22}V_2 + \lambda_{23}V_3$$
$$q_3 = \lambda_{31}V_1 + \lambda_{32}V_2 + \lambda_{33}V_3$$

sau, în funcție de tensiuni :

$$q_1 = (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13})U_{10} - \lambda_{12}U_{12} - \lambda_{13}U_{13}$$
$$q_2 = -\lambda_{21}U_{21} + (\lambda_{22} + \lambda_{21} + \lambda_{23})U_{20} - \lambda_{23}U_{23}$$
$$q_3 = -\lambda_{31}U_{31} - \lambda_{32}U_{32} + (\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{33})U_{30}$$

Dacă se ține cont de relațiile lui Maxwell pentru capacități:

$$q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13}$$
$$q_2 = C_{21}U_{21} + C_{20}U_{20} + C_{23}U_{23}$$
$$q_3 = C_{31}U_{31} + C_{32}U_{32} + C_{30}U_{30}$$

se pot obține expresiile capacităților parțiale :

$$C_{i0} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} \qquad i = \overline{1,3}$$

$$C_{ij} = -\lambda_{ij} \qquad i, j = \overline{1,3}, i \neq j$$

Odată determinate valorile capacităților se poate trece la calculul tensiunilor şi curenților pe linie prin rezolvarea exactă a sistemului de ecuații sau prin calcul numeric.

## 2. Modelarea liniilor electrice trifazate prin multipoli

Pentru a putea lua în considerare fenomenele de cuplaj electric şi magnetic dintre fazele vecine şi a uşura realizarea programelor de calcul, se modelează linia prin înserierea unui număr de tronsoane, fiecare dintre acestea fiind reprezentat prin elemente concentrate 2.1., unde tensiunile sunt considerate în raport cu pământul.

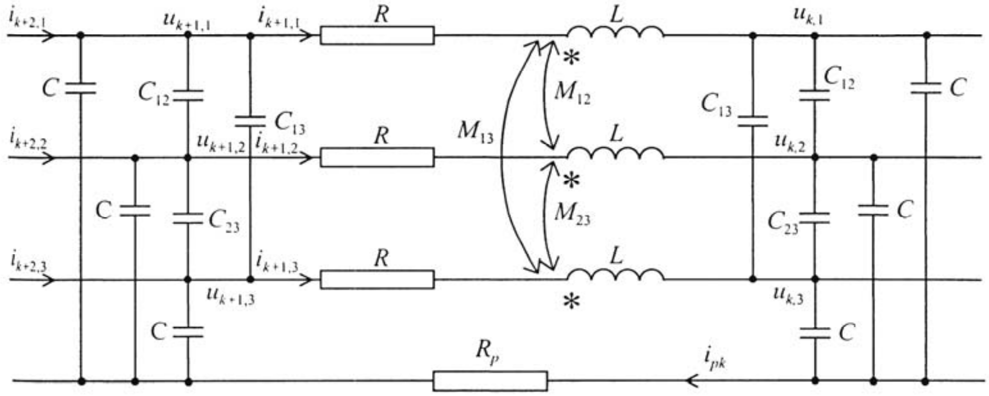

***Figura 2.1.*** Schema unui tronson elementar de linie trifazată

Sistemul de ecuații diferențiale ce caracterizează comportarea acestui sistem este următorul:

$$
\begin{aligned}
u_{k+1,1} &= Ri_{k+1,1} + L\frac{di_{k+1,1}}{dt} + M_{12}\frac{di_{k+1,2}}{dt} + M_{13}\frac{di_{k+1,3}}{dt} + u_{k,1} + R_p i_{pk}\\
u_{k+1,2} &= Ri_{k+1,2} + L\frac{di_{k+1,2}}{dt} + M_{12}\frac{di_{k+1,1}}{dt} + M_{23}\frac{di_{k+1,3}}{dt} + u_{k,2} + R_p i_{pk}\\
u_{k+1,3} &= Ri_{k+1,3} + L\frac{di_{k+1,3}}{dt} + M_{13}\frac{di_{k+1,3}}{dt} + M_{23}\frac{di_{k+1,2}}{dt} + u_{k,3} + R_p i_{pk}\\
i_{k+2,1} &= i_{k+1,1} + C_{12}\frac{d\left(u_{k+1,1} - u_{k+1,2}\right)}{dt} + C_{13}\frac{d\left(u_{k+1,1} - u_{k+1,3}\right)}{dt} + C\frac{du_{k+1,1}}{dt}\\
i_{k+2,2} &= i_{k+1,2} + C_{12}\frac{d\left(u_{k+1,2} - u_{k+1,1}\right)}{dt} + C_{23}\frac{d\left(u_{k+1,2} - u_{k+1,3}\right)}{dt} + C\frac{du_{k+1,2}}{dt}\\
i_{k+2,3} &= i_{k+1,3} + C_{13}\frac{d\left(u_{k+1,3} - u_{k+1,1}\right)}{dt} + C_{23}\frac{d\left(u_{k+1,3} - u_{k+1,1}\right)}{dt} + C\frac{du_{k+1,3}}{dt}
\end{aligned}
$$

iar, $\mathrm{i_{pk}} = \mathrm{i_{k+1,1}} + \mathrm{i_{k+1,2}} + \mathrm{i_{k+1,3}}$

Dacă se presupune că se analizează scurtcircuitul un regim de scurtcircuit trifazat şi simetric şi că stingerea arcului electric are loc la trecerea curentului prin zero, condițiile inițiale pentru necunoscutele acestui sistem de ecuații diferențiale vor fi:

$$
\begin{aligned}
&i_{k,1}\Big|_{t=0} = 0 \quad \forall k = \overline{1, n+1}\\
&i_{k,3}\Big|_{t=0} = -i_{k,2}\Big|_{t=0} = \frac{\sqrt{3}I_{sc}}{\sqrt{2}} \quad \forall k = \overline{1, n+1}.\\
&u_{k,1}\Big|_{t=0} = \frac{U_0}{2n}k \quad \forall k = \overline{1, n+1}.\\
&u_{k,2}\Big|_{t=0} = u_{k,3}\Big|_{t=0} = -\frac{U_0}{2n}k \quad \forall k = \overline{1, n+1}.
\end{aligned}
$$

unde $U_0$ este tensiunea de la începutul liniei (valoare de vârf) iar $n$ este numărul de tronsoane în care se împarte linia.

În programul de simulare, pentru luarea în considerare şi a rezistenței proprii a liniei, stabilirea condițiilor inițiale se face prin calcul complex al regimului de scurtcircuit stabilizat pentru sistem. Condițiile la limită ale sistemului de ecuații sunt:

$$
\begin{aligned}
i_{1,n+1} &= 0\\
u_{n1,2} &= -\frac{U_0}{2}
\end{aligned}
$$